INSTRUCCIONES GENERALES Y VALORACIÓN

El examen presenta dos opciones, A y B.
El alumno deberá elegir **UNA Y SÓLO UNA** de ellas y resolver los cuatro ejercicios de que consta.
No se premite el uso de calculadoras con capacidad de representación gráfica.

PUNTUACIÓN: La calificación máxima de cada ejercicio se indica en el encabezamiento del mismo.

Tiempo: 90 minutos

OPCIÓN A

1. (2 puntos). Calcular $\int_1^2 \frac{dx}{x^2+2x}$

2. (2 puntos). a) (1 punto). Calcular los valores de a y b para que la función

$$f(x)=\begin{cases} 3x+2 & si \quad x<0 \\ x^2+2a\cos x & si \quad 0\le x<\pi \\ ax^2+b & si \quad x\ge \pi \end{cases}$$

sea continua para todo valor de x.

b) (1 punto). Estudiar la derivabilidad de $f(x)$ para los valores de a y b obtenidos en el apartado anterior.

3. (3 puntos).Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -8 & -3 \end{pmatrix}$, $I=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) (1 punto). Comprobar que $\det(A^2)=(\det(A))^2$ y que $\det(A+I)=\det(A)+\det(I)$.

b) (0,5 puntos). Sea M una matriz cuadrada de orden 2. ¿Se puede asegurar que se cumple que $\det(M^2)=(\det(M))^2$?. Razonar la respuesta.

c) (1,5 puntos). Encontrar todas las matrices cuadradas M , de orden 2, tales que:

$$\det(M+I)=\det(M)+\det(I).$$

4. (3 puntos). Se consideran los puntos $A(0,1,0)$ y $B(1,0,1)$. Se pide:

a) (1 punto). Escribir la ecuación que deben verificar los puntos $X(x,y,z)$ que equidistan de A y B.

b) (0,5 puntos). Determinar la ecuación que verifican los puntos $X(x,y,z)$ cuya distancia a A es igual a la distancia de A a B.

c) (1,5 puntos). Escribir las ecuaciones paramétricas de la recta formada por los puntos $C(x,y,z)$ del plano $x+y+z=3$ tales que el triángulo ABC es rectángulo con el ángulo recto en el vértice A.

OPCIÓN **B**

1. (2 puntos). a) (1 punto). Resolver el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x+y-3z=0 \\ 2x+3y-z=5 \end{cases}$$

b) (1 punto). Hallar la solución del sistema anterior tal que la suma de los valores correspondientes a cada una de las tres incógnitas sea igual a 4.

2. (2 puntos). a) (1 punto). Hallar todas las matrices $A=\begin{pmatrix} a & a \\ 0 & b \end{pmatrix}$ distintas de la matriz $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ tales que $A^2 = A$.

b) (1 punto). Para una cualquiera de las matrices A obtenidas en el apartado a), calcular

$$M = A + A^2 + \ldots + A^{10}$$

3. (3 puntos). Dada la función $f(x) = xe^{2x}$, se pide:

a) (1,5 puntos). Dibujar su gráfica indicando su dominio, asíntotas, intervalos de crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos relativos, intervalos de concavidad y convexidad y puntos de inflexión.

b) (1,5 puntos). Calcular el área comprendida entre el eje OX y la gráfica de $f(x)$ entre $-1 \le x \le 1$.

4. (3 puntos). Un plano π corta a los ejes de coordenadas en los puntos A(1,0,0) , B(0,λ,0) , C(0,0,4). Se pide:

a) (1,5 puntos). Hallar el valor de $\lambda>0$ de manera que el volumen del tetraedro OABC (donde O es el origen), sea 2.

b) (1,5 puntos). Para el valor de λ obtenido en el apartado a), calcular la longitud de la altura del tetraedro OABC correspondiente al vértice O.

MATEMÁTICAS II

CRITERIOS ESPECÍFICOS DE CORRECCIÓN

OPCIÓN A

1. Descomposición en fracciones simples: 1 punto.
   Resolución de la integral: 1 punto.

2. Apartado a): 1 punto.
   Apartado b): 1 punto.

3. Apartado a): 1 punto.
   Apartado b): 0,5 puntos.
   Apartado c): 1,5 puntos.

4. Apartado a): Planteamiento, 0,5 puntos. Resolución, 0,5 puntos.
   Apartado b): 0,5 puntos.
   Apartado c): Planteamiento, 1 punto. Resolución, 0,5 puntos.

OPCIÓN B

1. Apartado a): 1 punto.
   Apartado b): 1 punto.

2. Apartado a): Planteamiento, 0,5 puntos. Resolución, 0,5 puntos.
   Apartado b): 1 punto.

3. Apartado a): Estudio de la función, 1 punto. Dibujo de la gráfica, 0,5 puntos.
   Apartado b): 1,5 puntos.

4. Apartado a): Planteamiento, 1 punto. Resolución, 0,5 puntos.
   Apartado b): Planteamiento, 1 punto. Resolución, 0,5 puntos.

MATEMÁTICAS II

SOLUCIONES

OPCIÓN A

1. $\dfrac{1}{x^2+2x}=\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x+2} \Rightarrow A=\dfrac{1}{2}\ ,\ B=-\dfrac{1}{2}$

$$\int_1^2 \frac{dx}{x^2+2x}=\left[\frac{1}{2}\ln x-\frac{1}{2}\ln(x+2)\right]_1^2=\boxed{\ln\sqrt{\frac{3}{2}}}$$

2. $f(x)=\begin{cases}3x+2 & x<0\\ x^2+2a\cos x & 0\le x<\pi\\ ax^2+b & x\ge\pi\end{cases}$

a) $\lim_{x\to 0^-} f(x)=2\ ;\ \lim_{x\to 0^+} f(x)=2a$

$2a=2 \Rightarrow \boxed{a=1}$

$\lim_{x\to\pi^-} f(x)=\pi^2-2;\ \lim_{x\to\pi^+} f(x)=\pi^2+b$

$\pi^2-2=\pi^2+b \Rightarrow \boxed{b=-2}$

b) $f'(x)=\begin{cases}3 & x<0\\ 2x-2\,\text{sen}\,x & 0<x<\pi\\ 2x & x>\pi\end{cases}$

$f'(0^-)=3\ ;\ f'(0^+)=0\ ;$ $f(x)$ no derivable en $x=0$

$f'(\pi^-)=2\pi;\ f'(\pi^+)=2\pi;$ $f(x)$ derivable en $x=\pi$

$\boxed{f(x) \text{ es derivable en } \mathbb{R}-\{0\}}$

3. $A^2=\begin{pmatrix}3&1\\-8&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&1\\-8&-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

a) $\det(A)=-1\ ,\ \det(A^2)=+1$

$\det(A^2)=[\det(A)]^2$

$A+I=\begin{pmatrix}4&1\\-8&-2\end{pmatrix}$ $\det(A+I)=0$

$\det(A)+\det(I)=-1+1=0$

b) $\det(A\cdot B)=\det(A)\cdot\det(B) \Rightarrow$

$\Rightarrow \det(M^2)=\det(M)\cdot\det(M)=[\det(M)]^2$

c) $M=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix};\ M+I=\begin{pmatrix}a+1&b\\c&d+1\end{pmatrix}$ $\left.\begin{array}{l}\det(M)+\det I=ad-bc+1\\ \det(M+I)=ad-bc+a+d+1\end{array}\right\}\Rightarrow \boxed{a+d=0}$

4. a) $x^2+(y-1)^2+z^2=(x-1)^2+y^2+(z-1)^2 \Rightarrow \boxed{2x-2y+2z=1}$

b) $d(A,B)=\sqrt{3};\ x^2+y^2-2y+1+z^2=3 \Rightarrow \boxed{x^2+y^2+z^2-2y-2=0}$

c) $\left.\begin{array}{l}\vec{AC}\ (x,y-1,z)\\ \vec{AB}\ (1,-1,1)\end{array}\right\}$ $\vec{AB}\cdot\vec{AC}=0 \Rightarrow x-y+z+1=0$

$r\begin{cases}x-y+z=-1\\ x+y+z=3\end{cases} \Rightarrow \boxed{r\begin{cases}x=1-\lambda\\ y=2\\ z=\lambda\end{cases}}$

OPCIÓN B

1. a) $\begin{cases} x+y-3z=0 \\ 2x+3y-z=5 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x=-5+8\lambda \\ y=\ 5-5\lambda \\ z=\ \ \ \ \lambda \end{cases}}$

b) $(-5+8\lambda)+(5-5\lambda)+\lambda=4 \Rightarrow \lambda=1 \Rightarrow \boxed{x=3,\ y=0,\ z=1}$

2. a) $A^2=\begin{pmatrix} a & a \\ 0 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & a \\ 0 & b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^2 & a^2+ab \\ 0 & b^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & a \\ 0 & b \end{pmatrix}=A$

$\left.\begin{array}{l} a^2=a \\ a^2+ab=a \\ b^2=b \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} a=0 \begin{cases} b=0 \\ b=1 \end{cases} \\ a=1 \rightarrow b=0 \end{cases}$ $\boxed{A=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}$

b) $A^2=A\ ;\ A^3=A^2A=A\cdot A=A;\ \ldots \Rightarrow \boxed{M=10\cdot A}$

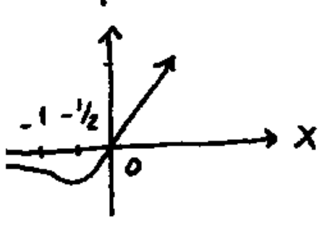
3. a) $y=xe^{2x}$; $D=\mathbb{R}$; A.H. $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^{2x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x}{e^{-2x}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{-2e^{-2x}}=0$

$\boxed{y=0}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} x\cdot e^{2x}=+\infty$

$y'=e^{2x}(1+2x) \Rightarrow$ $\boxed{\begin{array}{l}\text{decreciente}: (-\infty,-\tfrac{1}{2}) \quad \text{creciente}\ (-\tfrac{1}{2},+\infty) \\ \text{mínimo rel.}: \ x=-\tfrac{1}{2}\end{array}}$

$y''=e^{2x}(4+4x) \Rightarrow$ $\boxed{\begin{array}{l}\text{cóncava}\ (\downarrow): (-\infty,-1)\ .\ \text{convexa}\ (\uparrow): (-1,+\infty) \\ \text{P. Inflexión}: \ x=-1\end{array}}$



b) $\int xe^{2x}dx=\frac{1}{2}xe^{2x}-\frac{1}{4}e^{2x}+C$

$\text{área}=-\int_{-1}^{0}xe^{2x}dx+\int_{0}^{1}xe^{2x}dx=\boxed{\frac{-3e^{-2}+e^{2}+2}{4}}$

4. $A(1,0,0)$, $B(0,\lambda,0)$, $C(0,0,4)$; $\vec{OA}=(1,0,0)$, $\vec{OB}=(0,\lambda,0)$, $\vec{OC}=(0,0,4)$

a) $V=\frac{1}{6}4\lambda=2 \Rightarrow \boxed{\lambda=3}$

b) $\vec{AB}=(-1,3,0)$
$\vec{AC}=(-1,0,4)$

$\begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ -1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow \boxed{12x+4y+3z-12=0}$

$\boxed{h=\frac{12}{\sqrt{12^2+4^2+3^2}}=\frac{12}{13}}$