UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID

PRUEBA DE ACCESO A ESTUDIOS UNIVERSITARIOS **(LOGSE)**

Curso **2006-2007**

MATERIA: MATEMÁTICAS II

INSTRUCCIONES GENERALES Y VALORACIÓN

El examen presenta dos opciones, A y B.
Se deberá elegir **UNA Y SÓLO UNA** de ellas y resolver los cuatro ejercicios de que consta.
No se permite el uso de calculadoras con capacidad de representación gráfica.

PUNTUACIÓN: La calificación máxima de cada ejercicio se indica en el encabezamiento del mismo.

Tiempo: 90 minutos

OPCIÓN **A**

1. (2 puntos). Estudiar el rango de la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} m & m-1 & m(m-1) \\ m & 1 & m \\ m & 1 & m-1 \end{pmatrix}$$

según los valores del parámetro *m*.

2. (2 puntos). Sean las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 8 & -9 \\ 6 & -7 \end{pmatrix}$$

Hallar una matriz *X* tal que $XAX^{-1} = B$.

3. (3 puntos). Dados el punto A(1,–2,–3), la recta $r: \begin{cases} x+y+1=0 \\ z=0 \end{cases}$

y el plano $\pi: x-2y-3z+1=0$, se pide:

a) (1,5 puntos). Ecuación del plano que pasa por A, es paralelo a r y perpendicular a π.

b) (1,5 puntos). Ecuación de la recta que pasa por A, corta a r y es paralela a π.

4. (3 puntos). Se considera la función $f(x) = x^2 + m$, donde $m > 0$ es una constante.

a) (1,5 puntos). Para cada valor de *m* hallar el valor $a > 0$ tal que la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto (*a* , *f(a)*) pase por el origen de coordenadas.

b) (1,5 puntos). Hallar el valor de *m* para que la recta $y = x$ sea tangente a la gráfica de *f*(*x*).

OPCIÓN **B**

1. (2 puntos). Dada la función $f(x)=\dfrac{x^2-12}{x^2+4}$ calcular el área de la región acotada encerrada por su gráfica y el eje OX.

2. (2 puntos). Dibujar la gráfica de la función

$$f(x)=\frac{|x|}{2-x}$$

indicando su dominio, intervalos de crecimiento y decrecimiento y asíntotas.

3. (3 puntos). Dadas las matrices

$$A=\begin{pmatrix}5&2&0\\2&5&0\\0&0&1\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}a&b&0\\c&c&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

se pide:

a) (1,5 puntos). Encontrar las condiciones que deben cumplir *a*, *b*, *c* para que se verifique *AB*=*BA*.

b) (1,5 puntos). Para *a*=*b*=*c*=1, calcular B^{10}.

4. (3 puntos). Sean los puntos $A(\lambda,2,\lambda)$, $B(2,-\lambda,0)$, $C(\lambda,0,\lambda+2)$.

a) (1 punto). ¿Existe algún valor de λ para el que los puntos *A*, *B* y *C* están alineados?

b) (1 punto). Comprobar que si *A*, *B*, *C* no están alineados el triángulo que forman es isósceles.

c) (1 punto). Calcular la ecuación del plano que contiene al triángulo *ABC* para el valor $\lambda = 0$ y hallar la distancia de este plano al origen de coordenadas.

MATEMÁTICAS II

CRITERIOS ESPECÍFICOS DE CORRECCIÓN

OPCIÓN A

1. Planteamiento: 1 punto.
   Discusión de los rangos: 1 punto.

2. Planteamiento: 1 punto.
   Cálculo efectivo de la matriz X: 1 punto.

3. Apartado a): 1,5 puntos.
   Apartado b): 1,5 puntos.

4. Apartado a): 1,5 puntos.
   Apartado b): 1,5 puntos.

OPCIÓN B

1. Planteamiento y cálculo de los límites de integración: 1 punto.
   Cálculo del área: 1 punto.

2. Estudio de la función: 1,5 puntos.
   Dibujo de la gráfica: 0,5 puntos.

3. Apartado *a*): Planteamiento, 0,5 puntos. Resolución, 1 punto.
   Apartado *b*): 1,5 puntos.

4. Apartado *a*): 1 punto.
   Apartado *b*): 1 punto.
   Apartado *c*): 1 punto.

MATEMÁTICAS II
SOLUCIONES

OPCIÓN A

1.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} m & m-1 & m(m-1) \\ m & 1 & m \\ m & 1 & m-1 \end{vmatrix} = m(m-2)$$

$$\boxed{\begin{array}{l} m \notin \{0,2\} \Rightarrow rg(A) = 3 \\ m = 0 \quad \Rightarrow rg(A) = 2 \\ m = 2 \quad \Rightarrow rg(A) = 2 \end{array}}$$

2.

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}; \quad XA = BX \longrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -9 \\ 6 & -7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2a & -b \\ 2c & -d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8a-9c & 8b-9d \\ 6a-7c & 6b-7d \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2a = 3c \\ b = d \end{array} \right\} \text{ por ejemplo } \left\{ \begin{array}{ll} a = 3 & c = 2 \\ b = 1 & d = 1 \end{array} \right.$$

$$\boxed{X = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}} \text{ (hay infinitas soluciones)}$$

3.

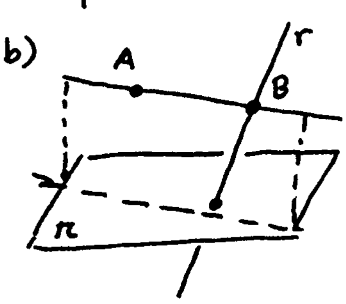
$A(1,-2,-3) \qquad r \left\{ \begin{array}{l} x+y+1=0 \\ z=0 \end{array} \right. \qquad \vec{v}_r = (1,-1,0)$

$\pi: x-2y-3z+1=0 \qquad \vec{n}_\pi = (1,-2,-3)$

a)

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+2 & z+3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & -3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \boxed{3x+3y-z=0}$$

b)



Plano por A, paralelo a π: $(x-1)-2(y+2)-3(z+3)=0$

$x-2y+3z-14=0$

Punto B: $r \left\{ \begin{array}{l} y = -x-1 \\ z = 0 \end{array} \right. \qquad x+2(x+1)-14=0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x=4 \\ y=-5 \\ z=0 \end{array} \right.$

$B(4,-5,0)$

Recta AB: $\vec{AB} = (3,-3,3) = 3\cdot(1,-1,1)$

$$\boxed{\frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z+3}{1}}$$

4. a) $f(x) = x^2+m \qquad f(a) = a^2+m \qquad$ Recta tangente: $y - a^2 - m = 2a(x-a)$

$f'(x) = 2x \qquad f'(a) = 2a \qquad x = y = 0 \Rightarrow a^2 = m \Rightarrow \boxed{a = \pm\sqrt{m}}$

b) $2a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{m = a^2 = \frac{1}{4}}$

OPCIÓN B

1. $\frac{x^2-12}{x^2+4}=0 \Rightarrow x=\pm 2\sqrt{3}$; $A=\left|\int_{-2\sqrt{3}}^{2\sqrt{3}}\frac{x^2-12}{x^2+4}\,dx\right| = \left|\int_{-2\sqrt{3}}^{2\sqrt{3}}\left(1-\frac{16}{x^2+4}\right)dx\right| =$

$$= \left| x - 8\,\mathrm{arctg}\,\frac{x}{2}\right|_{-2\sqrt{3}}^{2\sqrt{3}} = \boxed{\left(\frac{16\pi}{3}-4\sqrt{3}\right)u^2}$$

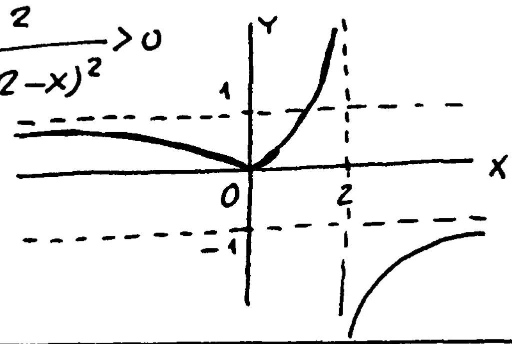
2. $f(x)=\begin{cases} \frac{-x}{2-x} & \text{si } x<0 \\ \frac{x}{2-x} & \text{si } x\geq 0,\ x\neq 2 \end{cases}$

asíntotas $\begin{cases} \text{vertical: } x=2 \\ \text{horizontales: } \begin{cases} -\infty;\ y=1 \\ +\infty;\ y=-1 \end{cases} \end{cases}$

$x<0 \qquad f'(x)=\frac{-2}{(2-x)^2}<0$

$\left.\begin{array}{l} x>0 \\ x\neq 2 \end{array}\right\} \qquad f'(x)=\frac{2}{(2-x)^2}>0$

decreciente: $(-\infty, 0)$
creciente: $(0,2)$ y en $(2,+\infty)$



3. a) $B=A^{-1}\cdot B\cdot A \Rightarrow \boxed{a=b=c} \Rightarrow B=\begin{pmatrix} a & a & 0 \\ a & a & 0 \\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

b) $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{B^{10}=\begin{pmatrix} 2^9 & 2^9 & 0 \\ 2^9 & 2^9 & 0 \\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}}$

4. $A(\lambda,2,\lambda)$; $B(2,-\lambda,0)$; $C(\lambda,0,\lambda+2)$ $\rightarrow$ $\vec{AB}=(2-\lambda,-\lambda-2,-\lambda)$; $\vec{AC}=(0,-2,2)$
$\vec{BC}=(\lambda-2,\lambda,\lambda+2)$

a) $\vec{AB}=k\cdot\vec{AC} \Rightarrow 2-\lambda=0 \Rightarrow \boxed{\lambda=2}$; $\frac{-\lambda-2}{-2}=2$; $\frac{-\lambda}{2}=-1$ $\boxed{\nexists\ \lambda\in\mathbb{R} \text{ para el cual } A,B,C \text{ estén alineados.}}$

b) $d(A,B)=+\sqrt{3\lambda^2+8}=d(B,C)$ $\boxed{\text{los lados } AB \text{ y } BC \text{ son iguales}}$

c) $\lambda=0$
Plano ABC: $\begin{vmatrix} x & y-2 & z \\ 2 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 2\end{vmatrix}=0$

$\pi:\ x+y+z-2=0$

$$\boxed{d(O,\pi)=\frac{|-2|}{\sqrt{3}}=\frac{2}{\sqrt{3}}\,u}$$