PAU Madrid. Matemáticas II. Año 2008. Examen de junio.

Opción A. Ejercicio 2. Valor: 3 puntos.

Dadas las rectas $r \equiv \left\{ \begin{array}{l} x - ay = 2 \\ ay + z = 1 \end{array} \right.$, $\quad s \equiv \left\{ \begin{array}{l} x - z = 1 \\ y + z = 3 \end{array} \right.$, se pide:

a) (1,5 puntos) Discutir la posición relativa de las dos rectas r, s según los valores del parámetro a.

b) (1,5 puntos) Si $a = 1$, calcular la distancia mínima entre las dos rectas r, s.

a) Encontramos dos puntos de la recta r:

$$y = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 2 \\ z = 1 \end{array} \right. \Rightarrow P_r = (2, 0, 1) \in r$$

$$y = 1 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = a + 2 \\ z = 1 - a \end{array} \right. \Rightarrow Q_r = (a + 2, 1, 1 - a) \in r$$

A partir del vector que une dos puntos de r obtenemos el vector de dirección:

$$\overrightarrow{P_rQ_r} = (a, 1, -a) \Rightarrow \vec{v}_r = (a, 1, -a)$$

Encontramos dos puntos de la recta s:

$$z = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 1 \\ y = 3 \end{array} \right. \Rightarrow P_s = (1, 3, 0) \in s$$

$$z = -1 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ y = 4 \end{array} \right. \Rightarrow Q_s = (0, 4, -1) \in s$$

A partir del vector que une dos puntos de s obtenemos el vector de dirección:

$$\overrightarrow{P_sQ_s} = (-1, 1, -1) \Rightarrow \vec{v}_s = (-1, 1, -1)$$

Para que los vectores $\vec{v}_r$ y $\vec{v}_s$ sean proporcionales debe ocurrir

$$\frac{a}{-1} = \frac{1}{1} = \frac{-a}{-1} \Rightarrow -a = 1 = a \rightarrow \text{imposible.}$$

Como los vectores $\vec{v}_r$ y $\vec{v}_s$ nunca son proporcionales, las rectas se cortan o se cruzan. Para distinguir los dos casos, resolvemos la ecuación $[\overrightarrow{P_sP_r}, \vec{v}_r, \vec{v}_s] = 0$:

$$[\overrightarrow{P_sP_r}, \vec{v}_r, \vec{v}_s] = \left| \begin{array}{ccc} 1 & -3 & 1 \\ a & 1 & -a \\ -1 & 1 & -1 \end{array} \right| = -1 - 3a + a + 1 + a - 3a = -4a = 0 \Rightarrow a = 0$$

$\boxed{\text{Solución}}$ Si $a = 0$, son secantes; si $a \neq 0$, se cruzan.

b) Si $a = 1$, las rectas se cortan y por tanto $d(r,s) = \dfrac{|[\overrightarrow{P_sP_r}, \vec{v}_r, \vec{v}_s]|}{|\vec{v}_r \times \vec{v}_s|}$

$$\vec{v}_r \times \vec{v}_s = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (0,2,2)$$

$$d(r,s) = \frac{|[\overrightarrow{P_rP_s}, \vec{v}_r, \vec{v}_s]|}{|\vec{v}_r \times \vec{v}_s|} = \frac{|-4 \cdot 1|}{\sqrt{0^2+2^2+2^2}} = \frac{4}{\sqrt{8}} = 1.414$$

$\boxed{\text{Solución}}$ $1.414\,u$