PAU Madrid. Matemáticas II. Año 2008. Examen de junio.

Opción A. Ejercicio 4. Valor: 2 puntos.

> Obtener los máximos y mínimos relativos, y los puntos de inflexión de la función:
>
> $$f(x) = x(\ln(x))^2$$
>
> siendo $\ln(x)$ el logaritmo neperiano de x.

Resolvemos la ecuación $f'(x) = 0$

$$f(x) = x(\ln(x))^2 \Rightarrow f'(x) = (\ln(x))^2 + x2\ln(x)\frac{1}{x} = (\ln(x))^2 + 2\ln(x)$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow (\ln(x))^2 + 2\ln(x) = 0 \Rightarrow \ln(x)(\ln(x)+2) = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \begin{cases} \ln(x) = 0 \Rightarrow x = 1 \\ \ln(x) + 2 = 0 \Rightarrow x = e^{-2} \end{cases} \Rightarrow x = \begin{cases} 1 \\ e^{-2} \end{cases}$$

Usando f'' estudiamos las soluciones obtenidas:

$$f'(x) = (\ln(x))^2 + 2\ln(x) \Rightarrow f''(x) = 2\ln(x)\frac{1}{x} + 2\frac{1}{x} = \frac{2}{x}(\ln(x)+1)$$

$$f''(1) > 0 \Rightarrow f \text{ tiene un mínimo relativo en } x = 1$$

$$f''(e^{-2}) < 0 \Rightarrow f \text{ tiene un máximo relativo en } x = e^{-2}$$

Resolvemos la ecuación $f''(x) = 0$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow \frac{2}{x}(\ln(x)+1) = 0 \Rightarrow \ln(x) + 1 = 0 \Rightarrow x = e^{-1}$$

Usando f''' estudiamos la solución obtenida:

$$f''(x) = \frac{2}{x}(\ln(x)+1) \Rightarrow f'''(x) = -\frac{2}{x^2}(\ln(x)+1) + \frac{2}{x}\cdot\frac{1}{x}$$

$$f'''(e^{-1}) \neq 0 \Rightarrow f \text{ tiene un punto de inflexión en } x = e^{-1}$$

Solución

f tiene un mínimo relativo en 1, un máximo relativo en e^{-2} y un punto de inflexión en e^{-1}

Autor: Pedro Reina. URL: http://pedroreina.net/pau/mat2008juna4.pdf