PAU Madrid. Matemáticas II. Año 2008. Examen de junio.

Opción B. Ejercicio 4. Valor: 2 puntos.

Dados el plano $\pi \equiv 3x + 2y - z + 10 = 0$ y el punto $P(1, 2, 3)$, se pide:

a) (0,5 puntos). Hallar la ecuación de la recta r perpendicular al plano π que pasa por el punto P.

b) (0,5 puntos). Hallar el punto Q intersección de π y r.

c) (0,5 puntos). Hallar el punto R intersección de π con el eje OY.

d) (0,5 puntos). Hallar el área del triángulo PQR.

a) El vector normal de π es el vector de dirección de la recta r.

$$\pi \equiv 3x + 2y - z + 10 = 0 \Rightarrow \vec{n}_\pi = (3, 2, -1) \Rightarrow \vec{v}_r = (3, 2, -1).$$

Con el vector de dirección de la recta y el punto por el que pasa se obtienen las ecuaciones paramétricas.

Solución $\quad r \equiv \begin{cases} x = 1 + 3\lambda \\ y = 2 + 2\lambda \\ z = 3 - \lambda \end{cases}$

b) Sustituimos las coordenadas de un punto de r en la ecuación de π para calcular el valor de λ que corresponde al punto Q:

$$3(1 + 3\lambda) + 2(2 + 2\lambda) - (3 - \lambda) + 10 = 0 \Rightarrow 14\lambda + 14 = 0 \Rightarrow \lambda = -1$$

Sustituimos en la ecuación de r el valor obtenido de λ: $Q = (-2, 0, 4)$

Solución $\quad Q = (-2, 0, 4)$

c) Las ecuaciones implícitas del eje OY son $\begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

Para hallar el punto R resolvemos el sistema formado por las ecuaciones del eje OY y del plano π:

$$\begin{cases} 3x + 2y - z + 10 = 0 \\ x = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -5 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow R = (0, -5, 0)$$

Solución $\quad R = (0, -5, 0)$

d) El área pedida es $\frac{1}{2}|\overrightarrow{RP} \times \overrightarrow{RQ}|$

$$\overrightarrow{RP} \times \overrightarrow{RQ} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 7 & 3 \\ -2 & 5 & 4 \end{vmatrix} = (13, -10, 19)$$

$$A = \frac{1}{2}|(13, -10, 19)| = \frac{1}{2}\sqrt{13^2 + (-10)^2 + 19^2} = 12.55$$

$\boxed{\text{Solución}}$ $\quad A = 12.55\, u^2$