INSTRUCCIONES GENERALES Y VALORACIÓN

Instrucciones: El examen presenta dos opciones A y B; el alumno deberá elegir una de ellas y contestar razonadamente a los cuatro ejercicios de que consta dicha opción. Para la realización de esta prueba puede utilizarse calculadora científica, siempre que no disponga de capacidad de representación gráfica o de cálculo simbólico.
Tiempo: Una hora y treinta minutos.
Calificación: La puntuación máxima de cada ejercicio se indica en el encabezamiento del mismo.

OPCIÓN A

Ejercicio 1. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Una papelería quiere liquidar hasta 78 kg de papel reciclado y hasta 138 kg de papel normal. Para ello hace dos tipos de lotes, A y B. Los lotes A están formados por 1 kg del papel reciclado y 3 kg de papel normal y los lotes B por 2 kg de papel de cada clase. El precio de venta de cada lote A es de 0,9 euros y el de cada lote B es de 1 euro. ¿Cuántos lotes A y B debe vender para maximizar sus ingresos? ¿A cuánto ascienden estos ingresos máximos?

Ejercicio 2. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = x^3 - 9x.$$

Se pide:

a) Calcular sus máximos y mínimos relativos, si existen.

b) Calcular el área del recinto plano acotado limitado por la gráfica de la función f y el eje OX.

Ejercicio 3. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Una persona cuida de su jardín pero es bastante distraída y se olvida de regarlo a veces. La probabilidad de que se olvide de regar el jardín es $2/3$. El jardín no está en muy buenas condiciones, así que si se le riega tiene la misma probabilidad de progresar que de estropearse, pero la probabilidad de que progrese si no se le riega es de 0,25.
Si el jardín se ha estropeado, ¿cuál es la probabilidad de que la persona olvidara regarlo?

Ejercicio 4. (Puntuación máxima: 2 puntos)

En cierta población humana, la media muestral $\bar{X}$ de una característica se distribuye mediante una distribución normal. La probabilidad de que $\bar{X}$ sea menor o igual que 75 es 0,58 y la de que $\bar{X}$ sea mayor que 80 es 0,04. Hallar la media y la desviación típica de $\bar{X}$. (Tamaño muestral $n = 100$).

OPCIÓN **B**

Ejercicio 1. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Encontrar todas las matrices X cuadradas 2×2 que satisfacen la igualdad

$$XA = AX$$

en cada uno de los dos casos siguientes:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$

Ejercicio 2. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Se considera la curva de ecuación cartesiana:

$$y = x^2 + 8x.$$

Se pide:

a) Calcular las coordenadas del punto en el que la recta tangente a la curva es paralela a la recta

$$y = 2x.$$

b) Calcular el área del recinto plano acotado limitado por las gráficas de la curva dada y de la recta de ecuación cartesiana

$$y = x + 8.$$

Ejercicio 3. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Se considera el experimento consistente en lanzar una moneda equilibrada y un dado equilibrado. Se pide:

a) Describir el espacio muestral de este experimento.

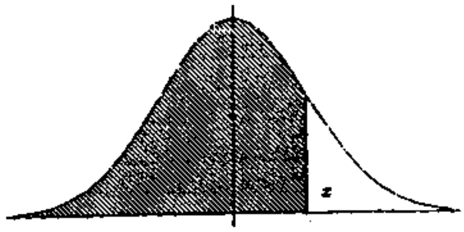
b) Determinar la probabilidad del suceso: *Obtener una cara en la moneda y un número par en el dado.*

Ejercicio 4. (Puntuación máxima: 2 puntos)

El tiempo de espera en minutos en una ventanilla se supone aproximado mediante una distribución $N(\mu, \sigma)$ con σ igual a 3 minutos. Se lleva a cabo un muestreo aleatorio simple de 10 individuos y se obtiene que la media muestral del tiempo de espera es de 5 minutos. Determinar un intervalo de confianza al 95% para μ.

ÁREAS BAJO LA DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD NORMAL ESTÁNDAR

Los valores en la tabla representan el área bajo la curva normal hasta un valor positivo de z.



z	,00	,01	,02	,03	,04	,05	,06	,07	,08	,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7703	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9954	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CC. SOCIALES II

CRITERIOS ESPECÍFICOS DE CORRECCIÓN

OPCIÓN A

- **Ejercicio 1.** (Puntuación máxima: 3 puntos)

Planteamiento del problema de programación lineal:	1 punto.
Localización correcta de la región factible:	1 punto.
Obtención correcta del vértice y del valor máximo:	1 punto.

- **Ejercicio 2.** (Puntuación máxima: 3 puntos)

a) Obtención correcta de la derivada:	0,5 puntos.
a) Cálculo de los máximos y mínimos:	0,5 puntos.
b) Localización de la región:	0,5 puntos.
b) Planteamiento del área como una integral:	1 punto.
b) Cálculo del área:	0,5 puntos.

- **Ejercicio 3.** (Puntuación máxima: 2 puntos)

Planteamiento correcto:	1 punto.
Cálculo correcto de la probabilidad pedida:	1 punto.

- **Ejercicio 4.** (Puntuación máxima: 2 puntos)

Planteamiento correcto:	1 punto.
Cálculo de la media:	0,5 puntos.
Cálculo de la desviación típica:	0,5 puntos.

OPCIÓN B

- **Ejercicio 1.** (Puntuación máxima: 3 puntos)

a) Productos XA y AX:	1 punto.
a) Obtención de X:	0,5 puntos.
b) Productos XA y AX:	1 punto.
b) Obtención de X:	0,5 puntos.

- **Ejercicio 2.** (Puntuación máxima: 3 puntos)

a) Planteamiento correcto:	0,5 puntos.
a) Obtención del punto:	0,5 puntos.
b) Puntos de corte de las gráficas:	0,5 puntos.
b) Localización correcta de la región:	0,5 puntos.
b) Planteamiento del área como una integral definida:	0,5 puntos.
b) Cálculo correcto del área:	0,5 puntos.

- **Ejercicio 3.** (Puntuación máxima: 2 puntos)

a) Determinación correcta del espacio muestral:	1 punto.
b) Cálculo correcto de la probabilidad pedida:	1 punto.

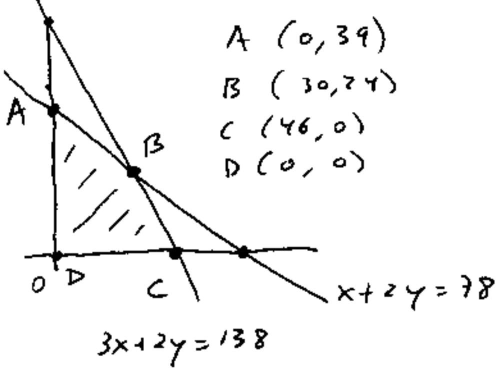
- **Ejercicio 4.** (Puntuación máxima: 2 puntos)

Planteamiento del intervalo de confianza:	1,5 puntos.
Cálculo correcto del intervalo:	0,5 puntos.

① $x =$ nº lotes tipo A, $y =$ nº lotes tipo B

$z = 0{,}9x + 1y$

Restricciones $\begin{cases} x + 2y \le 78 \\ 3x + 2y \le 138 \\ x \ge 0,\ y \ge 0 \end{cases}$



A $(0, 39)$
B $(30, 24)$
C $(46, 0)$
D $(0, 0)$

$z_A = 39$
$\boxed{z_B = 51}$
$z_C = 41{,}4$
$z_D = 0$

El máximo se da en B.

Hay que vender 30 lotes de tipo A y 24 de tipo B. Beneficio máximo: 51 €.

② a) $f'(x) = 3x^2 - 9 = 0 \Rightarrow x^2 = 3,\ x = \pm\sqrt{3}$

$f''(x) = 6x$; $f''(\sqrt{3}) > 0$: $\sqrt{3}$ es mínimo. $(\sqrt{3}, -6\sqrt{3})$

$f''(-\sqrt{3}) < 0$: $-\sqrt{3}$ es máximo. $(-\sqrt{3}, 6\sqrt{3})$

b) La función es simétrica respecto del origen.

Puntos de corte con OX: $(-3, 0), (0, 0), (3, 0)$

Área: $2 \left| \int_0^3 (x^3 - 9x)\, dx \right| = 2 \left| \left(\frac{x^4}{4} - \frac{9x^2}{2} \right]_0^3 \right| = \frac{81}{2}$

③ $P(\text{no riegue}) = \frac{2}{3}$ $\quad P(\text{Progrese} \mid \text{riegue}) = \frac{1}{2}$

$P(\text{estropee} \mid \text{riegue}) = \frac{1}{2}$ $\quad P(\text{progrese} \mid \text{no riega}) = \frac{1}{4}$

$$P(\text{no riegue} \mid \text{estropea}) = \frac{P(\text{no riegue})P(\text{estropee} \mid \text{no riegue})}{\text{''} + P(\text{riegue})P(\text{estropea} \mid \text{riega})} = \frac{\frac{2}{3}\frac{3}{4}}{\frac{2}{3}\frac{3}{4} + \frac{1}{3}\frac{1}{2}} = \frac{3}{4}$$

④ $\bar{x} \to N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$. $P(\bar{x} < 75) = 0{,}58$. Tipificando: $P\left(\underbrace{\frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}}_{z} \le \frac{75 - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right) = 0{,}58$

$P\left(z \le \frac{75 - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right) = 0{,}58$. De las tablas, $\boxed{\frac{75 - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} = 0{,}21}$

Análogamente, $P(\bar{x} > 80) = 0{,}04$. $P(\bar{x} \le 80) = 0{,}96$, y $P\left(z \le \frac{80 - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right) = 0{,}96$

De las tablas, $\boxed{\frac{80 - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} = 1{,}76}$. Como $n = 100$, $\sqrt{n} = 10$, y resolviendo el

sistema $\begin{cases} \frac{75 - \mu}{(\sigma/10)} = 0{,}21 \\ 80 - \mu/(\sigma/10) = 1{,}76 \end{cases}$, $\begin{matrix} \mu = 74{,}3225 \\ \sigma = 32{,}2580 \end{matrix} \Rightarrow \boxed{\begin{matrix} \mu_x = 74{,}3225 \\ \sigma_x = 3{,}2258 \end{matrix}}$

Opción B

(1) $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

a) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\begin{pmatrix} a & 3b \\ c & 3d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 3c & 3d \end{pmatrix} \rightarrow b = c = 0 \rightarrow \underline{X = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}}$

b) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3b & a \\ 3d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & d \\ 3a & 3b \end{pmatrix}$.

$\Rightarrow \begin{matrix} a = d \\ c = 3b \end{matrix} \Rightarrow \underline{X = \begin{pmatrix} d & b \\ 3b & d \end{pmatrix}}$

(2) a) $y' = 2x + 8 = 2 \Rightarrow x = -3$. Punto: $(-3, -15)$

b) $\left.\begin{matrix} y = x^2 + 8x \\ y = x + 8 \end{matrix}\right\}$ $\begin{matrix} x^2 + 8x = x + 8 \\ (x-1)(x+8) = 0 \end{matrix}$ $\rightarrow$ $\begin{matrix} x(x+8) = x + 8 \\ x = 1, \quad x = -8 \end{matrix}$

$$\text{Área} = \int_{-8}^{1} [x + 8 - x^2 - 8x]\,dx = \int_{-8}^{1} (-x^2 - 7x + 8)\,dx =$$

$$= \left(-\frac{x^3}{3} - \frac{7x^2}{2} + 8x\right]_{-8}^{1} = \frac{243}{2}$$

(3) a) C = sale cara al tirar la moneda
X = sale cruz " " " "

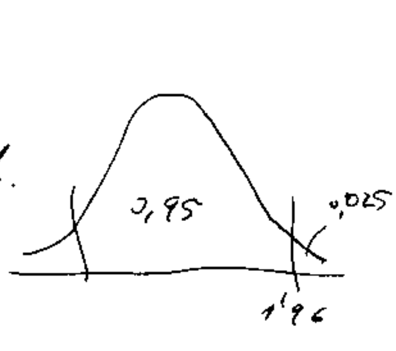
Espacio muestral: $\{(C, 1), (C,2), \ldots, (C,6), (X,1), (X,2), \ldots, (X,6)\}$

b) A: obtener cara en la moneda y nº par en el dado

$P(A) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

(4) x = tiempo de espera $\quad x \sim N(\mu, 3)$

$\bar{x}_{10} \sim N\left(\mu, \frac{3}{\sqrt{10}}\right)$, luego $\frac{\bar{x}_{10} - \mu}{3/\sqrt{10}}$ es pivotal.



$IC = \left(\bar{x} - 1{,}96\frac{3}{\sqrt{10}}, \bar{x} + 1{,}96\frac{3}{\sqrt{10}}\right)$;

Como $1{,}96\frac{3}{\sqrt{10}} = 1{,}859$, para $\bar{x} = 5$ queda:

$\boxed{IC = (3{,}141, \quad 6{,}859)}$