INSTRUCCIONES GENERALES Y VALORACIÓN

Instrucciones: El examen presenta dos opciones A y B; el alumno deberá elegir una de ellas y contestar razonadamente a los cuatro ejercicios de que consta dicha opción. Para la realización de esta prueba puede utilizarse calculadora científica, siempre que no disponga de capacidad de representación gráfica o de cálculo simbólico.
Tiempo: Una hora y treinta minutos.
Calificación: La puntuación máxima de cada ejercicio se indica en el encabezamiento del mismo.

OPCIÓN A

Ejercicio 1. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Una empresa fabrica láminas de aluminio de dos grosores, finas y gruesas, y dispone cada mes de 400 kg de aluminio y 450 horas de trabajo para fabricarlas. Cada m^2 de lámina fina necesita 5 kg de aluminio y 10 horas de trabajo, y deja una ganancia de 45 euros. Cada m^2 de lámina gruesa necesita 20 kg y 15 horas de trabajo, y deja una ganancia de 80 euros. ¿Cuántos m^2 de cada tipo de lámina debe fabricar la empresa al mes para que la ganancia sea máxima, y a cuánto asciende ésta?

Ejercicio 2. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Dada la función real de variable real definida por

$$f(x) = \frac{x^2 - 16}{x^2 - 4}$$

(a) Encontrar las asíntotas de la función.

(b) Especificar el signo de la función en las distintas regiones en las que está definida.

Ejercicio 3. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Los tigres de cierto país proceden de tres reservas: el 30% de la primera, el 25% de la segunda y el 45% de la tercera. La proporción de tigres albinos de la primera reserva es 0,2%, mientras que dicha proporción es 0,5% en la segunda, y 0,1% en la tercera. ¿Cuál es la probabilidad de que un tigre de ese país sea albino?

Ejercicio 4. (Puntuación máxima: 2 puntos)

La duración de la batería de cierto modelo de teléfono móvil se puede aproximar por una distribución normal con una desviación típica de 5 meses. Se toma una muestra aleatoria simple de 10 baterías y se obtienen las siguientes duraciones (en meses):

33, 34, 26, 37, 30, 39, 26, 31, 36, 19

Hallar un intervalo de confianza al 95% para la duración media de este modelo de batería.

OPCIÓN **B**

Ejercicio 1. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Se considera el sistema lineal de ecuaciones, dependiente del parámetro real a :

$$\left\{ \begin{array}{rrrl} x & +y & +2z & = 2 \\ -2x & +3y & +z & = 1 \\ -x & +ay & +3z & = 3 \end{array} \right.$$

(a) Discutir el sistema para los distintos valores de a.

(b) Resolver el sistema para $a = 2$.

Ejercicio 2. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Representar gráficamente la región acotada limitada por las gráficas de las funciones

$$f(x) = 9 - x^2 \quad , \quad g(x) = 3 + x$$

y obtener su área.

Ejercicio 3. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Una urna contiene 10 bolas blancas y 5 negras. Se extraen dos bolas al azar sin reemplazamiento. ¿Cuál es la probabilidad de que sean del mismo color?

Ejercicio 4. (Puntuación máxima: 2 puntos)

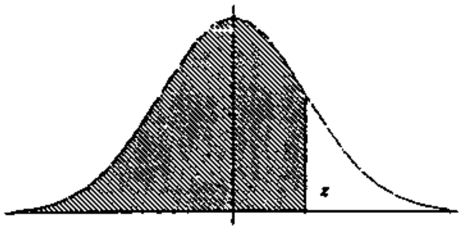
El peso en kg de los estudiantes universitarios de una gran ciudad se supone aproximado por una distribución normal con media 60 kg y desviación típica 8 kg. Se toman 100 muestras aleatorias simples de 64 estudiantes cada una. Se pide:

(a) La media y la desviación típica de la distribución de la media muestral.

(b) ¿En cuántas de las 100 muestras cabe esperar una media entre 59 y 61 kg?

ÁREAS BAJO LA DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD NORMAL ESTÁNDAR

Los valores en la tabla representan el área bajo la curva normal hasta un valor positivo de *z*.



z	,00	,01	,02	,03	,04	,05	,06	,07	,08	,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7703	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9954	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CC. SOCIALES II

CRITERIOS ESPECÍFICOS DE CORRECCIÓN

OPCIÓN A

Ejercicio 1. (Puntuación máxima: 3 puntos)
Obtención correcta de la función objetivo y las restricciones: 1,5 puntos.
Representación correcta de la región factible y obtención del máximo: 1,5 puntos.

Ejercicio 2. (Puntuación máxima: 3 puntos)
Por cada apartado correctamente resuelto: 1,5 puntos.

Ejercicio 3. (Puntuación máxima: 2 puntos)
Planteamiento correcto del problema: 1 punto.
Resolución correcta del problema: 1 punto.

Ejercicio 4. (Puntuación máxima: 2 puntos)
Planteamiento correcto del intervalo: 1,5 puntos.
Obtención correcta del intervalo: 0,5 puntos.

OPCIÓN B

Ejercicio 1. (Puntuación máxima: 3 puntos)
Discusión correcta del sistema: 2 puntos.
Resolución correcta para a=2: 1 punto.

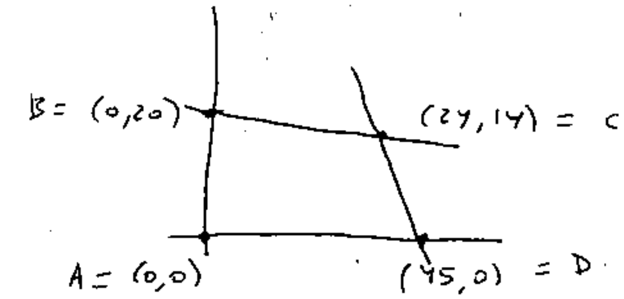
Ejercicio 2. (Puntuación máxima: 3 puntos)
Representación correcta: 1,5 puntos.
Obtención correcta del área: 1,5 puntos.

Ejercicio 3. (Puntuación máxima: 2 puntos)
Planteamiento correcto de los sucesos y sus probabilidades: 1 punto.
Probabilidad pedida: 1 punto.

Ejercicio 4. (Puntuación máxima: 2 puntos)
Por cada apartado correctamente resuelto: 1 punto.

(1) $X = m^2$ de tipo A (finas)
$Y = m^2$ de tipo B (gruesas)

Restricciones: $\begin{cases} 5x + 20y \le 400 \\ 10x + 15y \le 450 \\ x, y \ge 0 \end{cases}$



Función objetivo: $Z = 45x + 80y$

$Z_A = 0$, $Z_B = 1600$, $\underline{Z_C = 2200}$, $Z_D = 2025$. Ganancia óptima: 2200 €

Se deben fabricar 24 m^2 de lámina fina y 14 m^2 de lámina gruesa.

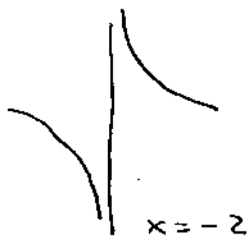
(2) a) $\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 1$: Asíntotas horizontales: $y = 1$

Asíntotas verticales: Como la función es racional, son los ceros del denominador: $x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = 2,\ x = -2$

$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 2^-} f(x) = +\infty \\ \lim_{x\to 2^+} f(x) = -\infty \end{array}\right\}$

$\lim_{x\to -2^-} f(x) = -\infty$

$\lim_{x\to -2^+} f(x) = +\infty$

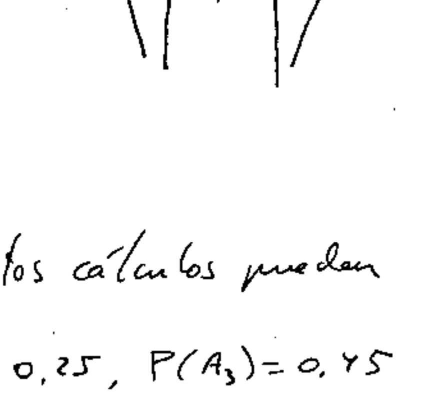


Asíntotas oblicuas: no hay.

b) Si $x_1 < \cdots < x_n$ son los ceros y los puntos de discontinuidad de f., la función conservará el signo en los intervalos $(-\infty, x_1), (x_1, x_2) \ldots (x_n, +\infty)$

Ceros de f: $\dfrac{x^2-16}{x^2-4} = 0 \Rightarrow x = 4,\ x = -4$

Puntos de discontinuidad: $x = 2,\ x = -2$



Signo en $(-\infty, -4)$: + (por ejemplo, $f(-5) > 0$)
Signo en $(-4, -2)$: − (" " , $f(-3) < 0$)
Signo en $(-2, 2)$: + (" " , $f(0) > 0$)
Signo en $(2, 4)$: − (" " , $f(3) < 0$)
Signo en $(4, \infty)$: + (" " , $f(5) > 0$)

Como la función es simétrica respecto del eje OY, estos cálculos pueden simplificarse.

(3) A_i = Proceder de la reserva i. $P(A_1) = 0{,}3$. $P(A_2) = 0{,}25$, $P(A_3) = 0{,}45$

$P(A) = P(A_1)P(A|A_1) + P(A_2)P(A|A_2) + P(A_3)P(A|A_3) = 0{,}002 \times 0{,}3 + 0{,}005 \times 0{,}25 + 0{,}001 \times 0{,}45 = \underline{0{,}0023}$

(4) $\bar{x} = 31,1$, $n=10$, $z_{\alpha/2} = z_{0,025} = 1,96$, $x \sim N(\mu, 5^2)$

$$IC = \left(31,1 \pm 1,96 \cdot 5/\sqrt{10}\right) = (28,001 , 34,199)$$

Opción B

(1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \\ -1 & a & 3 \end{pmatrix}$; $\det(A) = 0 \iff a = 4$

Si $a \neq 4$, $\det(A) \neq 0$, $\left.\begin{matrix} rg(A) = 3 \\ rg(A|b) = 3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$ Sistema compatible y determinado.

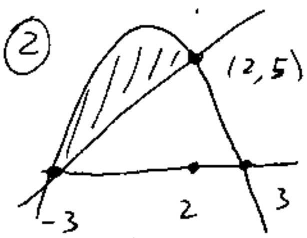
Para $a=4$, $\left.\begin{matrix} rg(A) = 2 \\ rg(A|b) = 2 < 3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$ Sistema compatible indeterminado.

Alternativamente,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ -2 & 3 & 1 & 1 \\ -1 & a & 3 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 5 & 5 & 5 \\ 0 & a+1 & 5 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a+1 & 5 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \underline{\underline{a-4}} & 0 & 0 \end{array}\right)$$

b) Para $a=2$, la solución es $x=0$, $y=0$, $z=1$.

(2)



$$\text{área} = \int_{-3}^{2} (9-x^2)\,dx - \int_{-3}^{2} (3+x)\,dx =$$

$$= \left[-\frac{x^3}{3} + 6x - \frac{x^2}{2}\right]_{-3}^{2} = \frac{125}{6}$$

(3) $\left.\begin{matrix} A = \text{sacar dos blancas} \\ B = \text{" dos negras} \\ C = \text{" mismo color} \end{matrix}\right\}$ $\left.\begin{matrix} P(A) = \frac{10}{15} \times \frac{9}{14} = \frac{3}{7} \\ P(B) = \frac{5}{15} \times \frac{4}{14} = \frac{2}{21} \end{matrix}\right\}$ $P(C) = P(A) + P(B) = \frac{11}{21}$

(4) $\bar{x}_{64} \sim N(60\ 1)$, pues $\mu_{\bar{x}} = \mu = 60$ y $\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{8}{\sqrt{64}} = 1$

a) $\mu_{\bar{x}} = 60$, $\sigma_{\bar{x}} = 1$

b) $P(59 < \bar{x} < 61) = P\left(\frac{59-60}{1} < z < \frac{61-60}{1}\right) =$

$= P(-1 < z < 1) = P(z<1) - [1 - P(z<1)] = 0,6826$

Luego en $100 \times 0,68 = 68$ muestras esperamos una media entre 59 y 61 kg.